

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información

Problemario para Algoritmos y Estructuras III

Autores:

Oscar Meza
Maruja Ortega

Reporte Técnico CI-005-97
Marzo 1997

Resumen

Este problemario es un compendio de ejercicios tanto propuestos como recopilados por los autores en los últimos años. Dichos ejercicios fueron revisados y colocados en orden de acuerdo a los tópicos del curso CI-2613. Aunque la revisión fue exhaustiva, no está exenta de posibles correcciones, las cuales haremos gustosamente con el valioso aporte que el lector crítico pueda hacer del mismo; por lo que esperamos de estudiantes, preparadores y profesores, que nos hagan llegar sus observaciones y sugerencias. Queremos agradecer la revisión hecha por el Profesor Gabor Loerincs.

1. Conceptos básicos

Grafo, nodo, vértice, lados, aristas, conjunto de adyacencias, lazo, digrafo, multigrafo, multiplicidad, subgrafo, representaciones de grafo, isomorfismos, invariantes.

Ejercicios:

1. Dado un grafo $G=(V,E)$, escriba un procedimiento para construir su grafo simétrico G^{-1} , suponiendo que se tiene el grafo G representado mediante:
 - Su matriz de adyacencias
 - Su matriz de incidencias
 - Su lista de adyacencias
2. Modele el comportamiento de una máquina que vende chocolates de 150 Bs. La máquina acepta sólo billetes de 50 y 100 Bs. y no devuelve cambio, pero sí el dinero en caso de error.
3. Modele el comportamiento de una máquina similar a la anterior, pero con capacidad de dar vuelto.
4. Modele el problema de examinar un oración, palabra por palabra, que consiste de un artículo, seguido de a lo sumo 3 adjetivos, luego un sustantivo y por último un verbo. Ejemplo: El autobús paró, Un niño pequeño duerme.
5. Se quiere organizar una comisión de estudiantes de manera tal que dicha comisión sea lo más pequeña posible y que los que la conforman conozcan la forma de trabajo de todos los que están presentes en ella. Para eso se tiene una lista de los equipos que se han formado desde el comienzo de su carrera:
 - Año 1: Andrés-Bernardo, Horacio, Daniel, Enrique-Fernando, Carolina-Ana.
 - Año 2: Andrés-Fernando, Bernardo-Carolina, Daniel, Enrique,
 - Año 3: Andrés-Carolina, Bernardo-Enrique, Daniel, Horacio-Ana, Fernando
 - Año 4: Andrés-Enrique, Ana-Fernando, Horacio-Fernando, Daniel, Carolina.

Modele el problema mediante grafos

6. Pruebe que en un digrafo, la suma de los grados de entrada de todos los nodos del grafo es igual a la suma de los grados de salida de todos los nodos, e igual al número de arcos del grafo.
7. Un sastre trabaja con una máquina de coser que se inspecciona cada año. El sastre, al comienzo de cada año, puede decidir entre reparar o vender la máquina. Los precios de reparación y venta depende del número de años de uso de la máquina y vienen dados por la siguiente tabla:

Años	Reparar (Bs.)	Vender (Bs.)
1	700	1000
2	300	500
3	900	200
4	-	0

Después de cuatro años de uso, la máquina no puede ser reparada y su precio de venta es despreciable. Si el sastre decide vender su máquina, debe comprarse una nueva cuyo precio es de Bs. 2000. La máquina que posee el sastre actualmente tiene 2 años de uso. Suponga que estamos a comienzo de año. El sastre desea conocer la planificación de cuatro años con todas las posibles acciones que puede tomar.

8. Con motivo de su regreso al país, Horacio desea invitar a su casa a sus antiguos amigos de estudios: Pablo, Diego, Gaspar, Julián y Nicolás. Sin embargo, a pesar de que Horacio mantiene buenas relaciones con cada uno de sus compañeros, entre ellos han surgido diferencias al pasar de los años:

- Nicolás y Gaspar riñeron por cuestiones de trabajo.
- Pablo es ahora derechista mientras que Nicolás sigue siendo izquierdista.
- Julián le debe dinero a Nicolás.
- Pablo, Julián y Diego son fanáticos de distintos equipos de beisbol, por lo que siempre terminan peleando.

Ante esta situación, Horacio se da cuenta de que será necesario hacer más de una reunión para poder verlos a todos sin que se presenten situaciones incómodas, pero por otro lado, la situación económica lo obliga a realizar el mínimo de reuniones posibles. Modele el problema que se plantea a Horacio.

9. Considere el problema de reconocer si un string dado pertenece a un lenguaje especificado mediante la siguiente expresión regular:

$$a^*b^*c^*d+a^*b^*c^*$$

donde:

(a) $V=\{a,b,c,d\}$ es el vocabulario del lenguaje.

(b) $\forall x,y;x,y \in V$:

- x^* se interpreta como 0 o más ocurrencias de x .
- x^+ se interpreta como 1 o más ocurrencias de x .
- x se interpreta como una ocurrencia de x .
- $x+y$ se interpreta como la ocurrencia de x o la ocurrencia de y .

Por ejemplo, el string **aaab** pertenece al lenguaje dado porque:

$$aaab = a^3b^1c^0d^0$$

mientras que el string **aacc** no pertenece al lenguaje ya que:

$$aacc = a^2b^0c^2d^0$$

cuando la especificación exige al menos una ocurrencia del símbolo **b**.

10. El jefe del departamento de sistemas de una compañía ha convocado a seis reuniones de un mismo día. Después de enviar las convocatorias para las reuniones en el horario que se muestra en la tabla 1, la secretaria se da cuenta de que el jefe alteró su agenda, y hace un nuevo estimado de la duración de las reuniones, el cual que muestra en la tabla 2. Como las reuniones deben realizarse en el orden previsto originalmente, hay que modificar las horas de inicio de alguna de ellas. Esperando hacer el menor número de cambios posibles, la secretaria construye un grafo no dirigido, donde los vértices v_1, v_2, \dots, v_6 representan las reuniones y existe un arco de v_i a v_j con $i < j$ si:

$$\sum_{k=0}^{j-(i+1)} \text{duración}_{i+k} \leq (\text{tiempo_inicial}_j - \text{tiempo_inicial}_i)$$

De el significado de la arista $\{v_i, v_j\}$

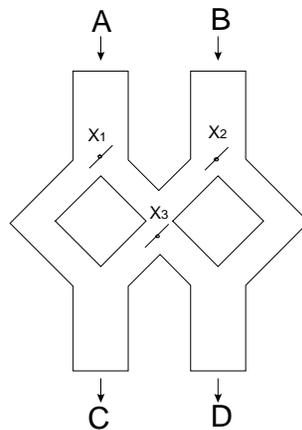
Reunión	Inicio
1	8:00 am
2	9:00 am
3	11:00 am
4	2:00 pm
5	3:30 pm
6	4:00 pm

Tabla 1

Reunión	Inicio
1	90 min
2	60 min
3	120 min
4	120 min
5	90 min
6	30 min

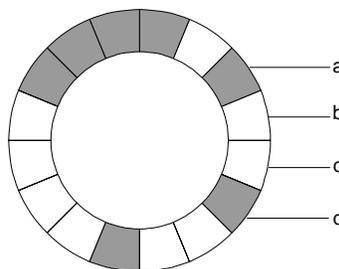
Tabla 2

11. La siguiente figura representa un juego:

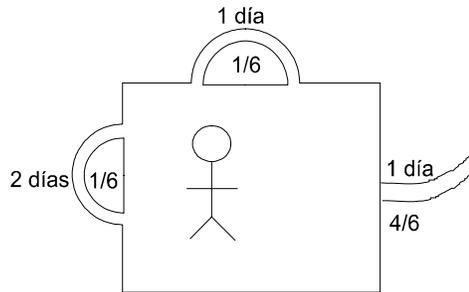


Una pelota puede entrar por la entrada A o por la entrada B. Los niveles x_1 , x_2 , x_3 pueden hacer que la pelota vaya hacia la derecha o hacia la izquierda. Toda vez que una pelota pasa por un nivel hace que este cambie de sentido, de tal forma que la próxima pelota que pase por allí tomará el camino opuesto. Modele el comportamiento de este juego.

12. La superficie de un tambor rotatorio se divide en 16 sectores. La información personal del tambor se representa por los dígitos binarios **a**, **b**, **c** y **d**, como se muestra en la figura, donde el área conductora (sombreada) y el área no conductora (blanca) son utilizadas para construir los sectores. Dependiendo de la posición del tambor, los terminales **a**, **b**, **c** y **d** estarán conectados a tierra o no. Para que las 16 diferentes posiciones del tambor sean representadas unívocamente por las señales binarias de los terminales, los sectores deben construirse de forma tal que los patrones de cuatro sectores consecutivos no sean iguales. Modele el problema planteado mediante grafos.



13. El ladrón de Bagdad se encuentra prisionero en un cuarto en el cual hay tres puertas que conducen a un túnel distinto cada una de ellas, de los cuales sólo uno conduce a la libertad. La duración de los viajes a través de los túneles, así como la probabilidad de escoger cada una de las puertas se indican en la siguiente figura:



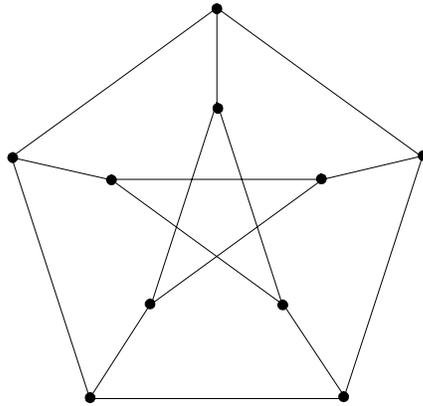
Sabiendo que el ladrón tiene muy mala memoria (no recuerda la puerta que tomó la última vez), proponga un grafo que modele el comportamiento del ladrón al escoger las puertas,

14. Pruebe que si un grafo simple $G=(V,E)$ con $E \neq \emptyset$ no tiene ciclos, entonces su número cromático es 2.
15. Sea $G=(V,E)$ un grafo simple y conexo. Considere el siguiente algoritmo para obtener una buena coloración de G :
- Inicialmente ningún vértice está coloreado
 - Visitar un primer vértice y colorearlo con el 1
 - Visitar los vértices de G hasta que no quede ninguno sin visitar. En el momento de visitar cada nodo x , el color utilizado para colorearlo será el menor número posible que no haya sido utilizado para colorear los nodos adyacentes a x que ya han sido visitados.

Muestre que el procedimiento descrito encuentra una buena coloración de G

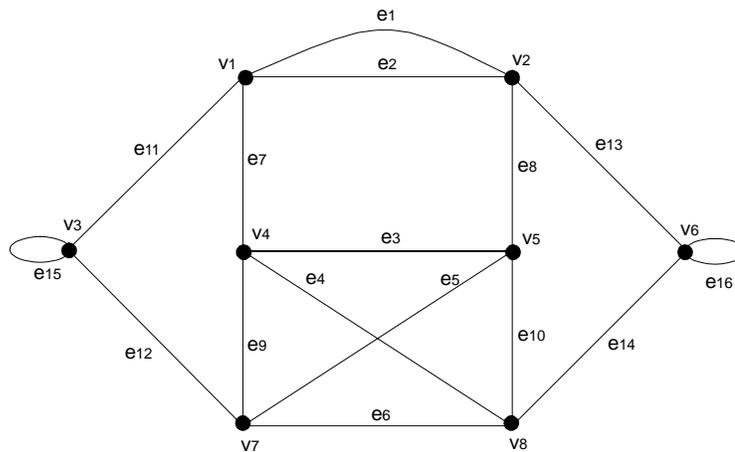
16. Sea G un grafo cuyo número cromático $\gamma(G)$ es 3. Diga si es posible que el mismo grafo tenga número de dominancia $\beta(G)$ igual a 1. Justifique su respuesta.
17. Sea $G=(V,E)$ un grafo y C una clique máxima de G . Si $w(G)$ es igual a cardinalidad de C , ¿que podría decirse con respecto a la coloración mínima de G ? Justifique su respuesta.

18. Dado el grafo:



Determine su índice cromático y su número de estabilidad, dando para tal fin una coloración.

19. Sea G el grafo de la figura siguiente:

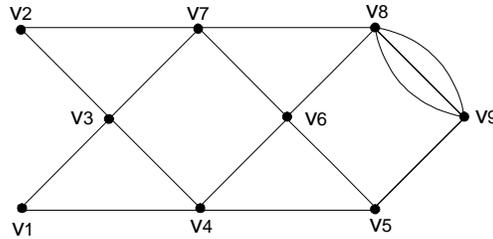


Responda las siguientes preguntas, explicando el por qué de sus respuestas

- ¿ G es un multigrafo? ¿Es un grafo simple? ¿Es conexo? ¿Es completo?
- ¿Cuáles son los vértices ayacentes a v_3 ?
- ¿Cuál es el grado de v_3 ?
- ¿Cuáles son las aristas incidentes en v_6 ?
- ¿Cuáles son los extremos de v_3 ?
- ¿Cuál es la vecindad de v_6 ?
- ¿Qué multiplicidad tiene e_1 ?
- Determine dos subgrafos isomorfos en G
- Determine el subgrafo inducido por $W=\{v_1, v_2, v_3, v_8\}$
- Determine el subgrafo inducido por $F=\{e_2, e_8\}$
- Dé una orientación al subgrafo inducido por $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ de forma que este subgrafo inducido y con esa orientación sea igual, si es posible, a su clausura transitiva.

- l) ¿En que difieren el conjunto de arcos de la clausura transitiva del digrafo hallado en k) y la relación de alcance E^* de ese mismo grafo?
- m) Diga si se puede determinar un ciclo euleriano en el grafo G original. ¿Por qué?. En caso positivo, determínelo.
- n) Diga, en general, cómo a partir de un ciclo euleriano se puede dar una orientación a las aristas de forma tal que $d^+(v)=d(v)$ para todo vértice.

20. Sea G el grafo dado en la figura siguiente:



Responda a las siguientes preguntas, justificando en cada paso su respuesta:

- a) ¿ G es un multigrafo?
- b) ¿Cuáles son los vértices adyacentes a v_1 ? ¿Cuál es el grado de v_1 ?
- c) ¿Cuáles aristas son incidentes en v_9 ?
- d) Determine el subgrafo inducido por $\{v_3, v_5, v_7, v_8, v_9\}$.
- e) Si existe una cadena euleriana, determínela.

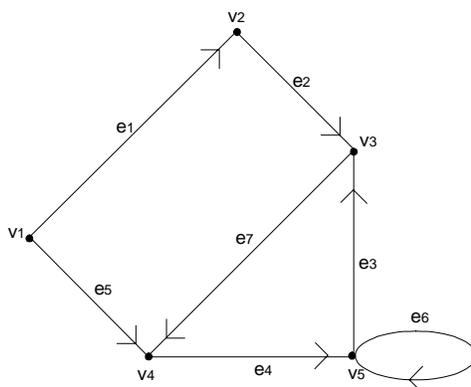
21. Sea $G=(V,E)$ un grafo orientado con $V=\{1,2,3\}$ y matriz de alcance M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Dibujar todos los posibles grafos G sin bucles ni lados múltiples que satisfagan las condiciones enunciadas.
- b) Hacer lo mismo, justificando su respuesta, para:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Dado el siguiente digrafo G :



Responda las siguientes preguntas, justificando en cada paso su respuesta:

- ¿Es simple?
- Calcule los sucesores de v_4 .
- Calcule los predecesores de v_3 .
- Calcule la vecindad de v_4 .
- Calcule $d(v_1)$.
- Calcule $d(v_4)$.
- Construya la matriz de adyacencias del grafo.
- Sea $S=\{v_1, v_3, v_4\}$. Construya el subgrafo Q inducido por S .
- Calcule la clausura transitiva de G . Dé el grafo y la matriz de adyacencias.
- Calcule la matriz de alcance de G .
- Diga si G es fuertemente conexo.
- Encuentre un camino simple no elemental en el grafo G .

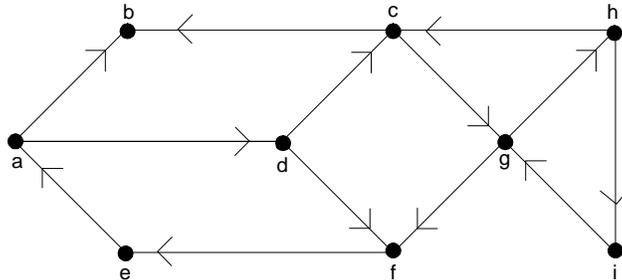
2. Alcance y conectividad

Cadena, camino, ciclo, circuito, alcance, clausura transitiva, conectividad, componentes conexas, conjuntos de articulación, istmo, árbol, arborescencia.

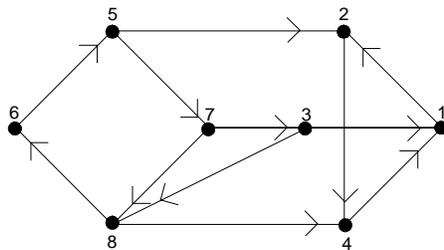
Ejercicios:

1. Demuestre que un digrafo no tiene circuitos si y sólo si existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > K: A^m$ es la matriz nula, es decir, llenas de ceros (A es la matriz de adyacencias del grafo).
2. Si en un grafo $G=(V,E)$ todos los nodos tienen grado 2, entonces $|E|=|V|$.
3. Demuestre que si $G=(V,E)$ es un grafo no orientado y conexo, se puede dar una orientación a cada una de sus aristas de forma que el digrafo resultante sea fuertemente conexo si y sólo si cada arista de G está en un ciclo de G .
4. Demuestre que si $G=(V,E)$ tiene p componentes conexas, entonces $|E| \geq |V| - p$. Además, si $|E| > |V| - p$, entonces G tiene al menos un ciclo.
5. Sea $G=(V,E)$ un grafo no orientado. Demostrar:
 - a) Si G es conexo entonces G tiene al menos $|E| - |V| + 1$ ciclos distintos.
 - b) Si G tiene p componentes conexas, entonces G tiene al menos $|E| - |V| + p$ ciclos distintos.
6. Un grafo dirigido en el que existe exactamente un nodo v con $d^-(v)=0$ y para todos los demás nodos $x \in V$ del grafo $d^+(x)=1$ NO necesariamente es una arborescencia.
 - a) De un ejemplo que confirme lo dicho arriba.
 - b) Diga que condición adicional es necesaria para que sí sea una arborescencia y demuéstrela.
7. Demuestre que A es una arborescencia si y sólo si A es conexo y existe un sólo vértice r tal que $d^-(r)=0$ y $\forall x \in V, x \neq r: d^+(x)=1$.
8. Demuestre que si G es una arborescencia con raíz r y $C=\langle x_0, e_1, x_1, \dots, e_m, x_m \rangle$ es un camino de longitud máxima en G , entonces $x_0=r$.
9. ¿Cuál es el número máximo de vértices que puede tener una arborescencia A con máximo grado de salida d^+ igual a d y longitud (número de arcos) del camino más largo igual a k ?
10. Escriba un programa para encontrar las componentes fuertemente conexas de un grafo representado mediante su matriz de adyacencias sin utilizar DFS.
11. Demuestra que todo grafo conexo $G=(V,E)$ con $|V| \geq 2$ tiene al menos dos vértices que no son de corte, i.e., que no son puntos de articulación.
12. Sea $T=(V_T, E_T)$ un árbol y v un vértice de T . Podemos inducir una orientación sobre T de forma que el resultado sea una arborescencia T' con raíz v . Decimos que dos nodos $x, y \in V_T$ forman un par descendiente lineal con respecto a T' si existe un camino entre x e y en T' . Sea $G=(V,E)$ un grafo no orientado, $v \in V$ y T un árbol expandido de G . Sea T' la arborescencia obtenida al orientar T de forma que v sea raíz de T' . Se dice que T' es un árbol expandido lineal de G si y sólo si para cada lado $\{x, y\} \in E$, los nodos x, y forman un par descendiente lineal con respecto a T' . Demuestre que dado G y v , existe un árbol expandido lineal de G con raíz v .
13. Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo no orientado. Escriba un algoritmo que encuentre $|E| - |V| + 1$ ciclos distintos de G .
14. Sea $G=(V,E)$ un grado no orientado. Demuestre que si G es un árbol, entonces G tiene al menos dos nodos de grado 1.

15. El siguiente grafo representa un plano del nuevo flechado de una urbanización, donde los nodos representan puntos de interés clave. Se desea saber si con este flechado todos los puntos estarán intercomunicados y en caso contrario, cuales puntos si lo estarán. Plantee el problema desde el punto de vista de grafos, indique cómo se resuelve y resuélvalo mediante un programa en PASCAL.



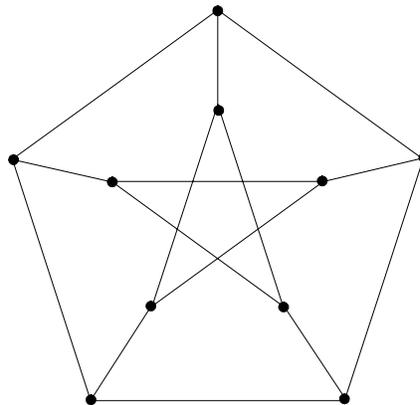
16. Pruebe que si para cada par de nodos x, y en un grafo $G=(V,E)$ sin lazos, existe una única cadena que los une, entonces G es un árbol.
17. Pruebe que todo árbol con exactamente dos nodos de grado 1 es una cadena.
18. Sea $G=(V,E)$ conexo y no orientado. Demuestre que:
- Si G tiene un istmo y $|V| > 2$, entonces G tiene al menos un punto de articulación.
 - De un ejemplo que muestre que el recíproco de a) no siempre es cierto.
 - Si todos los nodos de G tienen grado par, entonces G no tiene puntos de articulación.
 - Si e es un lado de G tal que e está en todo árbol de expansión de G , entonces e es un istmo.
 - Sea $v \in V$; si v es un punto de articulación de G , entonces el grado de v en todo árbol de expansión de G es mayor o igual a 2.
 - Si todos los nodos de G tienen grado par, entonces G no tiene ningún istmo.
19. Sea G un grafo dirigido cualquiera sin arcos múltiples. Sea G' un grafo arco minimal respecto a la propiedad "la clausura transitiva de G' es igual a la de G ".
- Demuestre que si (v, w) es un arco de G' , entonces el único camino simple de v a w es $\langle v, (v,w) w \rangle$.
 - Determine un G' para el siguiente grafo:



- Determine en algoritmo polinomial que calcule un G' . Diga cuál es la complejidad del su algoritmo en función del número de vértices y arcos de G .
20. Utilice el algoritmo de cálculo de un ciclo Euleriano en un grafo y el algoritmo de cálculo de una cadena de longitud mínima entre dos vértices dados para diseñar un algoritmo polinomial que determine una cadena cerrada en un grafo conexo que pase por todas las aristas del grafo. (Ayuda: recuerde que el número de vértices de grado impar de un grafo es par. Por otro lado,

si se tiene una cadena entre dos vértices distintos de grado impar y se agrega una arista múltiple por cada lado presente en la cadena, la paridad de los vértices internos de la cadena no se altera y los grados de los vértices extremos de las cadenas devienen pares).

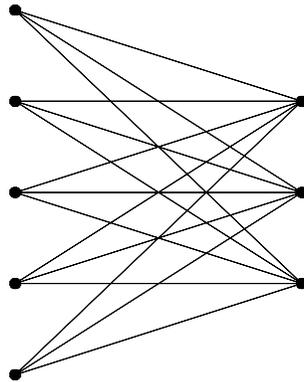
21. Se tiene una red de computadoras interconectadas de acuerdo a un esquema representado por un digrafo $G=(V,E)$ donde V representa las computadoras y E las interconexiones en la red. No todas las interconexiones son en ambos sentidos. En esta red se ha presentado una falla en un conjunto S de k computadoras, y se desea determinar si sigue habiendo comunicación en ambos sentidos entre los nodos x e y (x e y dados). Escriba un algoritmo que resuelva el problema anterior (se recomienda que su algoritmo esté basado o sea una modificación de alguno visto en clase). Discuta la complejidad de su algoritmo.
22. ¿Cuál es el máximo número de hojas en una arborescencia con grado máximo exterior igual a 2 y altura a ?
23. Demuestre que una arborescencia A sólo puede tener un nodo raíz.
24. Se define el nivel de un nodo y con respecto a otro nodo x , como la longitud de la cadena más corta entre x e y . Sea C una clique en un grafo G , y $v \in V$, indique que nivel tendrían los nodos de C con respecto a v .
25. Sea $G=(V,E)$ un grafo no orientado. Demuestre que:
 - a) Si G es conexo con $2k$ vértices de grado impar, E puede partitionarse en k cadenas de forma tal que cada lado se encuentra en una sola de estas cadenas.
 - b) Si G es conexo y v, w son los únicos nodos de grado impar entonces G tiene una cadena simple entre v y w .
 - c) Si G no tiene nodos aislados entonces G tiene una cadena Euleriana (que no es un ciclo) si y sólo si G es conexo y tiene sólo dos nodos de grado impar.
26. Si todos los nodos de un grafo $G=(V,E)$ tienen grado par, entonces existen ciclos $C_1=(V_1,E_1), \dots, C_m=(V_m,E_m)$ tales que E_1, \dots, E_m es una partición de E .
27. Responda verdadero o falso:
 - a) Un conjunto estable en un grafo G es un conjunto dominante en el grafo complementario de G .
 - b) Si un grafo no admite ciclos entonces su número cromático es 2.
 - c) Si un nodo y es alcanzable desde otro nodo x entonces x e y pertenecen a la misma componente fuertemente conexas.
28. Se dice que un grafo $G=(V,E)$ es hipohamiltoniano si G no es hamiltoniano, pero $G_{V-\{v\}}$ es hamiltoniano para todo vértice v en V . Muestre que el siguiente grafo es hipohamiltoniano:



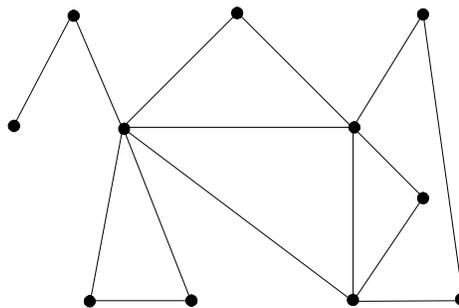
29. Sea $G = K_n$ y G' un grafo dirigido obtenido al dar una orientación a cada una de las aristas de G .
- Demuestre que G' tiene un camino que incluye cada nodo de G una y sólo una vez.
 - Formalice un algoritmo que resuelva el problema.
 - Diga que estructuras consideraría apropiadas para implementar la parte b).
30. Se define un **apareamiento** en un grafo $G=(V,E)$ como un conjunto de lados no adyacentes entre si. Se define una **cadena aumentante con respecto a un apareamiento A** como una cadena cuyos lados se encuentran alternadamente en A y en $E-A$ y tal que los nodos inicial y terminal de la cadena no son incidentes a lados en A . Se dice que un apareamiento A tiene máxima cardinalidad si no es posible encontrar ninguna cadena aumentante con respecto a A . Dado un grafo bipartito $G=(V_1 \cup V_2, E)$, se desea encontrar el número máximo de parejas que se pueden formar con elementos en V_1 y V_2 . Escriba un procedimiento para encontrar cadenas aumentantes en un grafo bipartito y utilícelo para encontrar el apareamiento buscado en G .

$$|E| > \binom{|V|-1}{2}$$

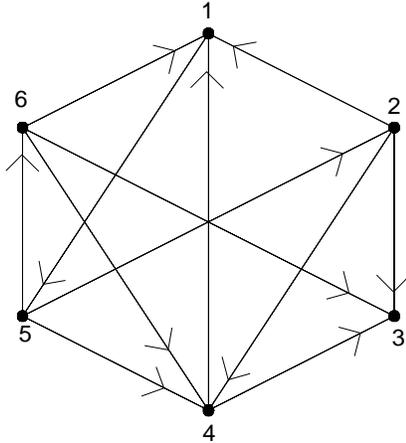
31. Sea $G=(V,E)$ un grafo simple no dirigido de orden $n \geq 2$. Demuestre que si entonces G es conexo.
32. Sea $G=(V,E)$ un grafo simple no dirigido, conexo pero no completo. Demuestre que G tiene 3 vértices u, v y w tales que $\{u, v\}, \{v, w\} \in E$ pero $\{u, w\} \notin E$.
33. Determine que el siguiente grafo no tiene ciclo hamiltonianos.



34. ¿Tiene el siguiente grafo un ciclo Euleriano? ¿Por qué?

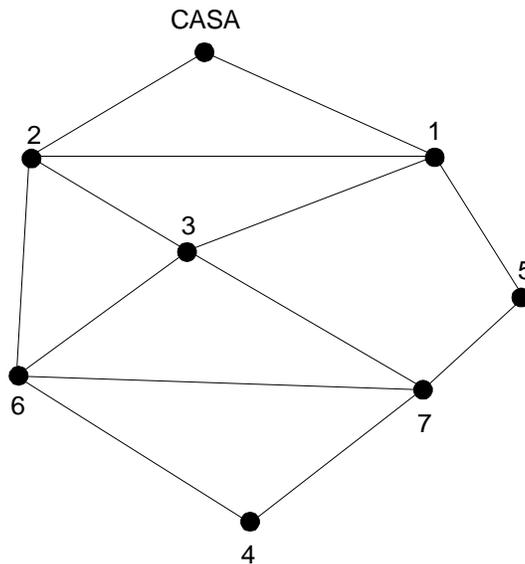


35. Dado el siguiente grafo:



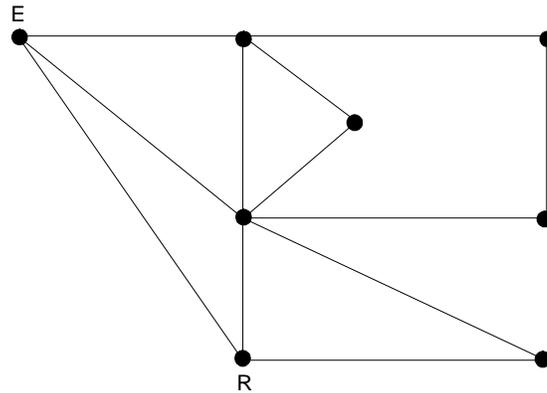
- a) ¿Es completo?
- b) ¿Tiene un camino hamiltoniano?

36. Un granjero ha descubierto que un topo está invadiendo sus sembradíos y ha decidido atraparlo. El granjero conoce donde están todos los huecos del topo y cuales se comunican por la superficie; en vista de lo cual piensa atraparlo colocando trampas en todas las vías lo suficientemente grandes para que sea imposible a nadie esquivarlos. El granjero partirá de su casa dejando las trampas y desea volver a ella con la tranquilidad de que el topo no volverá a fastidiarlo. En el grafo de la figura se indican los huecos y la casa del granjero y las posibles comunicaciones entre ellos. Indique si su plan es posible, por qué y en caso afirmativo indique cómo deberá ir colocando las trampas.



37. Se dispone de un grafo no dirigido que modela las calles de una ciudad. Los vértices representan las intersecciones y las aristas las calles. El servicio de aseo urbano de esta ciudad está planificando el recorrido que debe hacer el único camión que posee para recolectar la basura en todas las calles. Existen dos intersecciones de la ciudad que corresponden al sitio de estacionamiento del camión y al relleno sanitario de la ciudad.

- a) Debido a las molestias que causa el proceso de recolección se desea saber si es posible encontrar un recorrido que no pase por ninguna calle más de una vez. Modele el problema



en términos de la situación planteada. Además, para el mapa siguiente, diga si es posible; de ser su respuesta afirmativa halle tal recorrido utilizando algún algoritmo conocido (para cualquier algoritmo efectúe la corrida en frío).

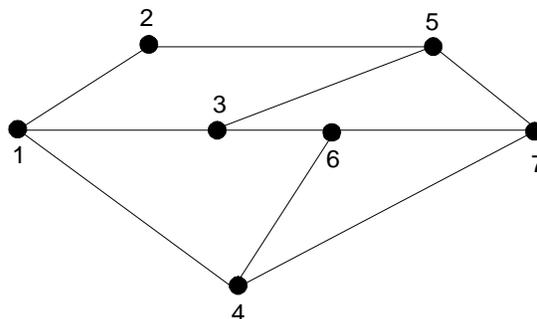
- b) Para efectos de recolección de productos reciclables, la compañía ha decidido colocar el mínimo número de centros de reciclaje en las intersecciones, de forma tal que todo vecino tenga disponible uno a menos de una cuadra. Modele el problema en términos de la representación planteada.

3. Recorridos en grafos

Recorrido, modelo general de etiquetamiento, búsqueda en profundidad (DFS), búsqueda en amplitud (BFS), componentes conexas, componentes fuertemente conexas.

Ejercicios:

1. Diseñe un algoritmo y luego codifíquelo en PASCAL, que halle las componentes conexas de un grafo $G=(V,E)$. Su algoritmo debe basarse en DFS.
2. Diseñe un algoritmo y luego codifíquelo en PASCAL, que halle una cadena simple en un grafo conexo que pase por todos los lados del grafo exactamente una vez en cada dirección. Utilice DFS.
3. Usando DFS con algunas modificaciones, escriba una función en PASCAL que reciba un grafo $G=(V,E)$ y verifique si el mismo no tiene circuitos, es decir, es un grafo de precedencia.
4. Haciendo uso de DFS, escriba un procedimiento en PASCAL que reciba un grafo simple y conexo y determine como deben dirigirse los lados para obtener un grafo fuertemente conexo.
5. Se define nodo **sumidero** como aquel nodo x donde $d^+(x)=0$ y x es alcanzable desde todos los demás nodos. Desarrolle una función en PASCAL que reciba un grafo y verifique si contiene un nodo sumidero.
6. Se define $p(G)$, donde $G=(V,E)$ es un grafo dirigido, como el conjunto de nodos de G que tienen exactamente p adyacentes. Desarrolle un procedimiento en PASCAL, que reciba un grafo y devuelva el conjunto $p(G)$ para un valor de p dado.
7. Se define $r(G,x)$, donde $G=(V,E)$ es un grafo dirigido y x un nodo cualquiera de V , como el conjunto de nodos de G que pueden alcanzar a x pasando exactamente por r arcos. Desarrolle un procedimiento en PASCAL que reciba un grafo y devuelva el conjunto $r(G,x)$ para un nodo x dado y un valor de r dado como dato.
8. Demuestre que si G es un grafo conexo, DFS genera un árbol expandido lineal.
9. ¿BFS genera un árbol expandido lineal?
10. Aplique DFS y BFS al siguiente grafo para encontrar un árbol expandido. Compare los resultados de ambos algoritmos.



11. Sea G un grafo conexo sin circuitos. Modifique DFS para encontrar el número de caminos desde un nodo dado s hasta cada uno de los demás nodos.

12. Dada una arborescencia A con raíz r , modifique DFS para hallar el camino mínimo de la raíz a las hojas y listarlo.
13. Sea $G=(V,E)$ un grafo simple y $u \in V$. Diseñe un algoritmo que halle el conjunto U de nodos alcanzables desde u . Utilice la matriz de incidencias.
14. Sea $G=(V,E)$ un grafo con $|V|=n$ y $|E|=m$. Diseñe un algoritmo que reciba como entrada m pares $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ y determine un subconjunto de estos pares que formen un árbol, si es posible.
15. Sea G un digrafo representado mediante lista de adyacencias. Usando DFS, encuentre un nodo de G cuyo grado interior sea mínimo.
16. Diseñe un algoritmo para determinar si una grafo es acíclico.
17. Diseñe un algoritmo que dado un digrafo sin circuitos encuentre un ordenamiento $<$ de los nodos tal que $v < w$ si existe un camino de v a w .
18. Diseñe un algoritmo basado en DFS, para encontrar un conjunto estable maximal de un grafo G .
19. Diseñe un algoritmo basado en BFS, para encontrar un conjunto dominante minimal en un grafo G .
20. Escriba un procedimiento que permita determinar si un DAG (grafo de precedencia) tiene algún nodo raíz.
21. Se define una anti-raíz como un nodo z de un grafo $G=(V,E)$ tal que $\forall x \in V, x \neq z: \exists$ camino en G desde x hasta z . Dado un digrafo $G=(V,E)$ de orden n , escriba un procedimiento para determinar si G tiene al menos una raíz y una anti-raíz. Indique la estructura de datos más adecuada para resolver el problema.
22. Dado un grafo G con un punto de articulación z , escriba un algoritmo para encontrar dos nodos x, y en G tales que toda cadena entre x e y pasa por z .
23. Implemente en PASCAL el siguiente algoritmo para encontrar puntos de articulación en un grafo $G=(V,E)$ no orientado:
 - Aplicar DFS a G , asignando un número a cada nodo x , $DFSNUM[x]$, en el mismo orden en que son visitados.
 - Para cada nodo x calcule el valor $Low[x]$, donde $Low[x]$ es el mínimo entre $DFSNUM[x]$ y $DFSNUM[w]$ para todo nodo w alcanzable desde x siguiendo un camino en el árbol y luego un arco de ida-vuelta hasta w .

En otras palabras, para todo nodo x , $Low(x)$ se puede calcular al finalizar la llamada al DFS en cada nodo de la siguiente manera:

$$Low(x) = \text{Min} \begin{cases} \text{Min}\{DFSNUM(z), \text{para todo } z \text{ t.q. existe un lado de ida - vuelta } (x,z) \text{ en } E\} \\ Low(y), \text{ para todo } y \text{ descendiente directo de } x \text{ en el árbol} \end{cases}$$

Los puntos de articulación son:

- i. La raíz del árbol si y sólo si tiene más de un descendiente en el árbol.
- ii. Cualquier otro nodo v distinto de la raíz es un punto de articulación si y sólo si tiene un sucesor directo w en el árbol con $Low(w) \geq DFSNUM(v)$.

Observación: Nótese que $Low(w) \geq DFSNUM(v)$ para todo descendiente directo w de v , lo cual implica que no existe forma de comunicar los sucesores de v con sus antecesores que no sea pasando por v .

24. Al aproximarse la fecha prevista para EL CAMPEONATO, en el cual intervendrán los equipos A, B, C y D, los organizadores necesitan determinar el número mínimo de días que éste puede durar, sabiendo que:
- Cada equipo debe jugar una vez contra cada uno de los otros participantes.
 - Un mismo equipo no puede jugar dos veces el mismo día.
 - Sólo debe descansar un equipo por día.

Formule el problema planteado en términos de grafos. Construya el grafo que corresponde al problema e indique que algoritmo debería utilizar para resolverlo.

25. Con motivo de las fiestas navideñas, Horacio desea invitar a su casa a sus antiguos amigos de estudios: Pablo, Diego, Gaspar, Julián y Nicolás. Sin embargo, a pesar de que Horacio mantiene buenas relaciones con cada uno de sus compañeros, entre ellos han surgido diferencias al pasar de los años:

- Nicolás y Gaspar riñeron por cuestiones de trabajo.
- Pablo es ahora derechista mientras que Nicolás sigue siendo izquierdista.
- Julián le debe dinero a Nicolás.
- Pablo, Julián y Diego son fanáticos de distintos equipos de beisbol, por lo que siempre terminan peleando.

Ante esta situación, Horacio se da cuenta de que será necesario hacer más de una reunión para poder verlos a todos sin que se presenten situaciones incómodas, pero por otro lado, la situación económica lo obliga a realizar el mínimo de reuniones posibles.

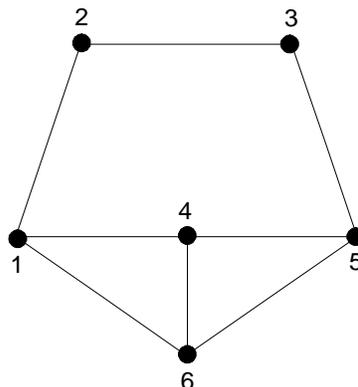
- Modele utilizando grafos el problema que se le plantea a Horacio. Indique que representan los nodos y lados de su grafo y especifique si este deberá ser orientado o no.
- Resuelva el problema, indicando a Horacio tantas soluciones como le sea posible.
- ¿Es su grafo bipartito? Justifique su respuesta.

26. La gerencia general de AVION AIR ha decidido agregar nuevas rutas al servicio que ofrece actualmente; para ello ha determinado que las nuevas rutas serán aquellas que unan ciudades para las cuales la conexión actual incluye más de una escala en el vuelo. Además, los aviones que adquirirá AVION AIR para cubrir las nuevas rutas utilizan un tipo de combustible especial, por lo que la empresa una vez establecida las rutas, deberá determinar los puntos donde se surtirá de combustible a estos aviones. Indique en términos de grafos como plantearía y resolvería el problema. AVION AIR le puede proporcionar un plano de las ciudades y las rutas actuales.

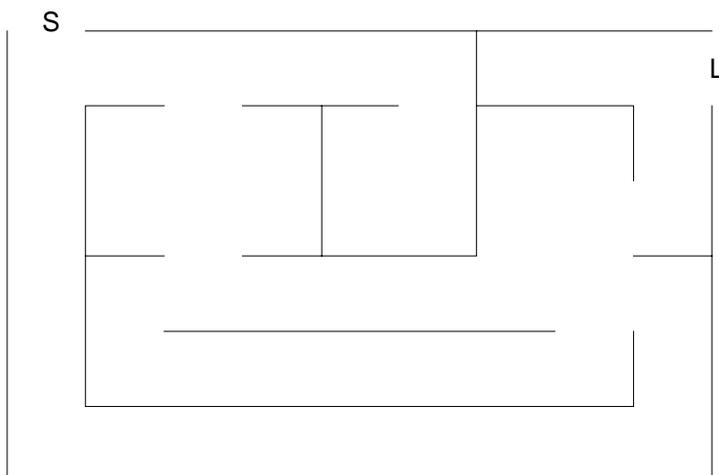
27. Sea $G=(V,E)$ un grafo no orientado y C una clique de G . Muestre que en el árbol producido por DFS todos los nodos de C estarán en un mismo camino desde la raíz. ¿Aparecen necesariamente en forma consecutiva?

28. Sea C una clique en un grafo no orientado $G=(V,E)$. Demuestre que al aplicar DFG a G todos los nodos de C quedarán en un mismo camino del árbol generado por el DFS.

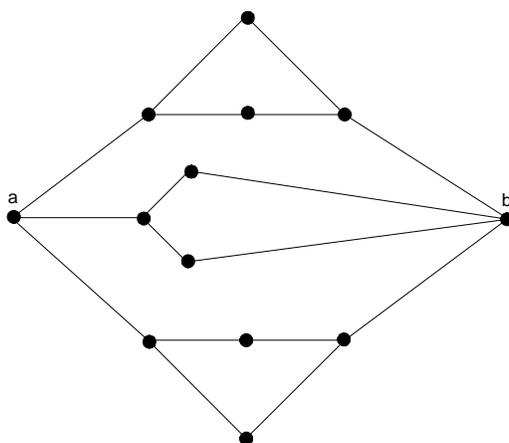
29. Aplique DFS y BFS al siguiente grafo y compare los resultados:



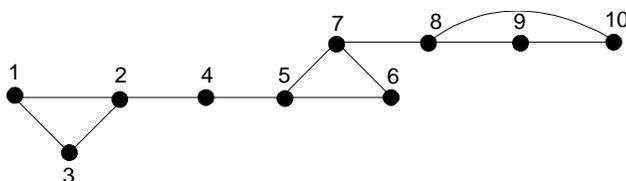
30. Considere el siguiente laberinto:



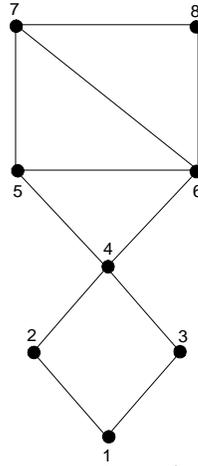
- a) Use DFS para encontrar un camino de S a L .
 - b) ¿Cuántos caminos sin ciclos existen?
31. En el siguiente grafo se desea hallar un camino entre los vértices a y b . Para ello se usa DFS, tomando como nodo de partida el vértice a y tomando el camino que termina en b . El algoritmo escoge siempre la arista de menor costo entre las que salen del nodo visitado. Asigne pesos a las aristas para que ningún camino entre a y b sea más costoso que el obtenido por DFS.



32. En el siguiente grafo halle un árbol expandido usando DFS.



33. Modifique DFS para encontrar los vértices de corte (puntos de articulación) y sus componentes



biconexas. Aplique su algoritmo al siguiente grafo.

34. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido sin aristas múltiples y B el bosque generado por el algoritmo de visita de nodos por búsqueda en profundidad en G . Sea $e=\{u, v\} \in E$ y u el extremo que es visitado primero en el algoritmo. e es un istmo de G si y sólo si no hay aristas de retorno desde ningún descendiente de v en B a un ancestro propio de v en B . Demuestre esta afirmación.
35. Mostrar que en el grafo de precedencia inmediata de la relación de orden $(P(A),C)$, A un conjunto infinito, todos los caminos de vértice x a un vértice y tienen la misma longitud.
36. Dado un grafo dirigido $G=(V,E)$, un vértice s y una función de costos en las aristas $c:E \rightarrow \mathfrak{R}$, modifique el algoritmo BFS para encontrar para cada vértice v alcanzable desde s , un camino de menor costo de s a v entre todos los caminos de menor longitud de s a v .

4. Caminos de costo mínimo

Costo mínimo, algoritmo de Dijkstra, algoritmo de Bellman, Algoritmo de Floyd, algoritmo A*, grafos de precedencia, relación de orden, ordenamiento topológico, planificación de proyectos.

Ejercicios:

1. Seleccione las estructuras de datos apropiadas para lograr que el tiempo de algoritmo de Dijkstra sea $O(e \log(n))$ para un grafo con e aristas y n vértices. ¿En que caso sería conveniente?
2. Muestre que el algoritmo de Dijkstra no funciona si los costos de los arcos son negativos.
3. Modifique el algoritmo de Dijkstra para que obtenga todos los caminos mínimos de un vértice v a cualquier otro w , en un grafo dirigido con costos positivos.
4. Se desea determinar el camino de costo máximo entre un par de vértices de un grafo de precedencia G con costos positivos. Se sugieren dos modificaciones al algoritmo de Dijkstra:
 - a) Se multiplican los costos de G por -1 y se construye con ello un nuevo grafo G' . Se aplica Dijkstra sobre G' . El camino mínimo de v a w en G' constituye el camino máximo en G .
 - b) Sea k el mayor costo de un arco de G . Se calcula la siguiente función de costo: $c'(e)=k-c(e)$, donde $c(e)$ es el costo del lado e en G , para crear el grafo G' . El camino mínimo en G' es el camino máximo en G .

Analice si estos algoritmos logran el objetivo deseado.

5. Sea G un digrafo sin arcos múltiples. ¿Cómo podrían ser usados los algoritmos de Floyd y Dijkstra para calcular la clausura transitiva del grafo G ?
6. Modifique Dijkstra para:
 - a) Detectar ciclos de costo negativo en un digrafo.
 - b) Imprimir la secuencia de vértices de G que conforman el camino de costo mínimo de todo el grafo.
7. Demuestre que el algoritmo que se da a continuación obtiene el costo de un camino mínimo de v_0 a cualquier vértice v en un grafo arbitrario con aristas que pueden tener costo negativo:

```
➤ Comienzo
➤   S ← {v0};
➤   D[v0] ← 0;
➤   Para cada v en V-{v0} hacer D[v] ← c(v0, v);
➤   Mientras S ≠ V hacer
�█     Comienzo
�█       Escoger un vértice w en V-S tal que D[w] sea mínimo;
�█       S ← S ∪ {w};
�█       Para todo v ∈ V tal que D[v] > D[w] + c(w, v) hacer
�█         Comienzo
�█           D[v] ← D[w] + c(w, v);
�█           S ← S - {v};
�█       Fin
➤   Fin
➤ Fin
```

8. El siguiente algoritmo, debido a Dantzig, encuentra todas las distancias mínimas en un digrafo, al igual que el algoritmo de Floyd. Sea $C^k(i, j)$ la distancia mínima de i a j , con $1 \leq i, j \leq k$ sin utilizar ningún vértice mayor que k . Sea $C^k(i, j) = 0$ para todo i y para todo k . También sea $c(i, j) = c(e)$ si $e = \{i, j\} \in E$ y $c(i, j) = \infty$ si $\{i, j\} \notin E$.

- $C^1(1, 1) \leftarrow \text{Min}\{0, c(1, 1)\}$
- $k \leftarrow 1$
- Repetir
- $k \leftarrow k + 1$
- Para $1 \leq i \leq k$ hacer
- $C^k(i, k) \leftarrow \text{Min}_{1 \leq j \leq k} \{C^{k-1}(i, j) + c(j, k)\}$
- $C^k(k, i) \leftarrow \text{Min}_{1 \leq j \leq k} \{c(k, j) + C^{k-1}(j, i)\}$
- Para $1 \leq i, j < k$ hacer
- $C^k(i, j) \leftarrow \text{Min}\{C^{k-1}(i, j), C^k(i, k), C^k(k, j)\}$
- Hasta $k = n$

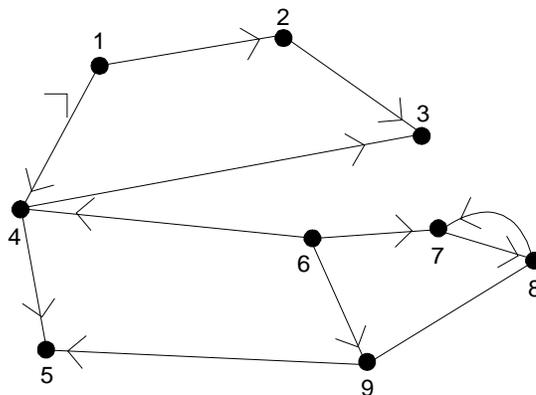
9. Se tiene un proyecto de construcción conformado por varias actividades: A, B, C, D, E, F y G, algunas de las cuales deben preceder a otras en su ejecución, como se indica a continuación:

Actividad	Precede a	Actividad
A		B, C
B		D, E, F
C		E
D		F

Actividad	Precede a	Actividad
E		F, G
F		G
G		---

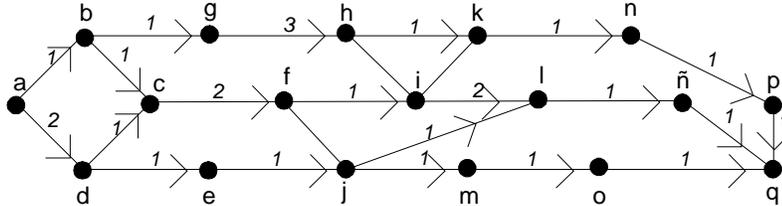
Suponiendo conocidos los tiempos mínimos C_{ij} requeridos entre el comienzo de la actividad i y el comienzo de la actividad j (siempre y cuando i preceda a j) se desearía determinar cuales actividades son críticas para el proyecto, para lo cual será necesario previamente asignar un número $N(x)$ a cada actividad x , de forma que si i precede a j entonces $N(i) < N(j)$. Construya un grafo que represente el proyecto e indique un algoritmo para asignar la numeración $N(x)$ a las actividades.

10. Para el siguiente grafo:



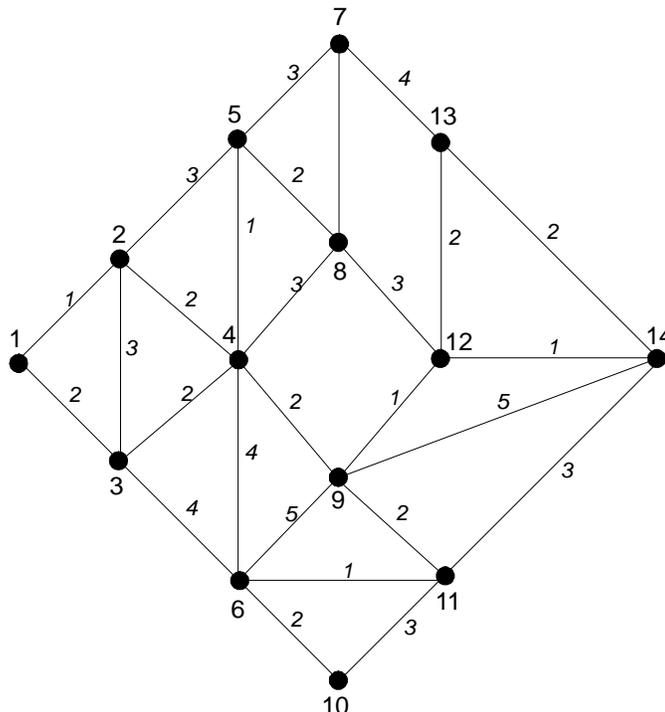
- a) Encuentre la clausura transitiva.
- b) Encuentre la longitud del camino más corto entre cada par de vértices.

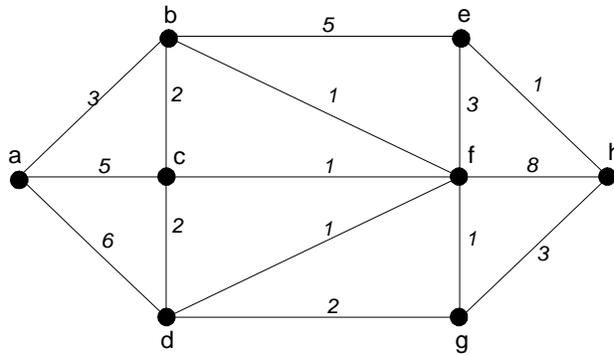
11. La compañía EMPR S.A. tiene planeado para su inmediata ejecución un proyecto que involucra unas 18 actividades, distinguidas con las letras de la A hasta la Q. Existen relaciones de precedencia entre muchas de estas actividades, la cuales se indican mediante el siguiente grafo, así como los tiempos mínimos requeridos entre los inicios de cada par de actividades que deben seguirse una a otra:



- Encuentre una numeración de las actividades tal que, si la actividad i debe preceder a la actividad j , el número de i sea menor que el de j . Indique el algoritmo utilizado y muestre su ejecución.
 - Encuentre el tiempo mínimo requerido para culminar todo el proyecto, así como la o las secuencias de actividades críticas. Muestre la ejecución del algoritmo.
12. Samuel J, Pettacci A. es miembro fundador y activo de los bomberos de la USB, y es quien maneja el camión bomba. Siendo Samuel estudiante de computación, y por lo tanto versado en métodos eficientes para evitar esfuerzos innecesarios, no le hace gracia dejar el agradable ambiente de la casa de su novia en la Urbina por más tiempo del estrictamente necesario. Usualmente, la cantidad de tiempo que les toma llegar a la sede al resto de los bomberos es de 15 minutos.

La pregunta que Samuel debe responder es “¿Cuántos minutos después que suena el buscapersonas puede despedirse de su novia, si quiere llegar no más tarde que el último miembro del grupo?”. Samuel construyó de memoria la red de la siguiente figura, fijando para cada tramo un estimado del tiempo necesario para atravesarlo. La casa de la novia de Samuel es el nodo 1 y la sede de los bomberos es el nodo 14. Diga como resolver el problema de Samuel y resuélvalo.





19. Una compañía manufacturera está planificando producir aires acondicionados de 3 componentes: gabinete, ventilador y motor. El precio de fabricación es de Bs. 20000 para los gabinetes, Bs. 50000 para los ventiladores y Bs. 80000 los motores. Sin embargo, una vez que los ventiladores están en producción, el costo de producción de gabinetes y motores se reduce en un 5%. Si los motores se producen primero, el costo de las otras unidades se reduce en un 10%. Además, después de estar 2 unidades en producción, se produce una reducción extra del 5% para la tercera unidad. Defina un grafo que represente el problema y resuélvalo como un problema de camino mínimo.
20. Dar tres razones por las cuales la siguiente lista de caminos no puede corresponder a un paso intermedio de un algoritmo de búsqueda de camino de costo mínimo, siguiendo el modelo general, con costos no negativos. s, a, b y c son vértices del grafo:
- | | |
|-----------------|---------|
| 1.- $(s, 0, -)$ | CERRADO |
| 2.- $(a, 3, 1)$ | ABIERTO |
| 3.- $(b, 2, 1)$ | CERRADO |
| 4.- $(b, 5, 2)$ | ABIERTO |
| 5.- $(c, 1, 3)$ | ABIERTO |
21. Analizar cómo varía la eficiencia en BFS y Dijkstra si la lista de caminos abiertos se guarda en un heap en lugar de una lista lineal.
22. Sea $G=(V,E)$ un grafo no orientado completo. Sea x un nodo de V . Sea T_x el grafo inducido por los lados de las cadenas obtenidas al aplicar BFS a G , comenzando por el nodo x .
- ¿Cuál es el grado de los nodos de T_x ? Dibujar T_x en un grafo de 7 nodos.
 - ¿Cuántas aristas de tipo árbol, ida-vuelta y cruzadas tendrá el grafo?
23. Proponga un algoritmo basado en el modelo general de etiquetamiento, cuya entrada sea un digrafo $G=(V,E)$ sin arcos múltiples y un vértice x de V , y cuya salida sea una lista de todos los caminos simples con vértice inicial x . Estime la complejidad en espacio y tiempo de su algoritmo (considere el peor caso).
24. Sea $G=(V,E)$ un digrafo sin arcos múltiples y c una función que asocia un número real a cada arco de G . Supongamos que se quiere hallar un camino de costo máximo desde un vértice s hasta cada vértice alcanzable desde s .
- ¿Qué condiciones habría que imponer a G y c para que pueda existir caminos de costo máximo desde s a cada vértice alcanzable desde s ?
 - Suponiendo que se satisfacen las condiciones dadas en a), ¿Para hallar un camino de costo máximo desde s hasta cada vértice alcanzable desde s bastaría con invertir el signo de los costos de los arcos y aplicar a G con estos nuevos costos un algoritmo de búsqueda de caminos mínimos basado en el modelo general de etiquetamiento?

5. Arboles

Arboles, arborescencias, propiedades, árbol mínimo cobertor, PRIM, KRUSKAL, árboles de búsqueda, árboles binarios, árboles tipo B.

Ejercicios:

1. Considere los siguientes recorridos de árboles binarios:

- a) (1) Recorrer el subárbol derecho.
(2) Visitar la raíz.
(3) Recorrer el subárbol izquierdo.
- b) (1) Visitar la raíz.
(2) Recorrer el subárbol derecho.
(3) Recorrer el subárbol izquierdo.

¿Qué relación existe entre estos dos recorridos y los recorridos pre, pos e inorden?

2. Dadas las siguientes expresiones aritméticas, construya los respectivos árboles que las representen:

- a) $a + b - (c * d)$
- b) $g * j - y / w$
- c) $a - b / c + d$
- d) $w + (x - y) * h$
- e) $x + y / w * h$
- f) $w + (a * d) - (b * c - j)$

3. Recorra los árboles construídos en (2) en pre, pos e inorden.

4. Dada una expresión aritmética con operadores binarios (+, -, *, /):

- a) Diseñe el procedimiento que construya el árbol binario correspondiente.
- b) Escriba un procedimiento en PASCAL que acepte valores para cada una de las variables en la expresión y luego recorra el árbol para evaluar la expresión al tiempo que imprime la misma notación postfixa.

5. Escriba un procedimiento que dada una lista de claves, almacene éstas en un árbol binario de búsqueda. Escriba luego las claves de menor a mayor.

6. Escriba un procedimiento que permita buscar una clave en un árbol de búsqueda imprimiendo el camino de búsqueda recorrido para localizarla.

7. Codifique en Pascal procedimientos para construir un árbol binario, cuyos nodos contienen caracteres de la 'a' a la 'z'. Luego codifique en PASCAL los procedimientos para recorrer el árbol en preorden, postorden e inorden.

8. Suponga que existen arreglos de n elementos, llamados Preorden, Postorden e Inorden que contienen el recorrido en pre, post e inorden respectivamente de un árbol binario de n nodos. Escriba un programa en PASCAL que construya el árbol a partir de la información que se tiene en los arreglos.

9. Considere los arreglos mencionados en la pregunta anterior. Escriba un programa en PASCAL que determine si el nodo i es padre del nodo j para todo par de nodos i, j del árbol.

10. Diseñe y codifique una función en PASCAL que reciba un apuntador a un nodo en árbol n -ario y devuelva Verdadero si ese nodo es la raíz de ese árbol y deberá devolver Falso en caso contrario.

11. Diseñe y codifique un procedimiento en PASCAL que reciba el apuntador a un nodo x en un árbol n -ario y devuelva el contenido de los nodos hermanos de x .

12. Diseñe y codifique una función en PASCAL que reciba dos apuntadores: uno que apunta a la raíz de un árbol binario y otro que apunte a un nodo de ese árbol. La función debe devolver el nivel en cuál está el nodo.

13. Se dice que un árbol T_1 es similar a un árbol T_2 si:

- a) T_1 tiene el mismo dibujo que T_2 o
- b) T_1 es igual a T_2 visto en un espejo.

Diseñe una función en PASCAL que reciba dos apuntadores a dos árboles T_1 y T_2 y devuelva 1 si los árboles son similares y 0 en caso contrario.

14. Un árbol binario de n hojas es estrictamente binario si tiene $2n-1$ nodos. Diseñe un procedimiento o función en PASCAL que verifique si un árbol es estrictamente binario.

15. Dado un árbol A con número de hijos variable, representado mediante la siguiente estructura:

```
Type nodo:   record
                clave: info;
                hermanos: ^nodo;
                hijos: ^nodo;
                end;
```

Escriba un procedimiento que imprima los nodos que se encuentran en un nivel N .

16. Dada la siguiente lista con 9 claves enteras diferentes: 1 3 4 5 9 7 8 6 2

- a) Indique cuál es la altura mínima que podría tener un árbol binario para almacenarlas.
- b) Construya un árbol de búsqueda, insertando las claves una a una, de forma que el árbol resultante luego de cada inserción sea balanceado (AVL).
- c) Elimine del árbol construido en b) la clave 5 y luego la clave 4, manteniendo el árbol siempre balanceado.
- d) Suponga que la misma lista de claves se almacena en un árbol tipo B de orden 2. Indique que claves ocasionarán división de nodos al ser insertados, y cuáles provocaran crecimiento del árbol (aumento de su altura).

17. Dado un árbol binario el cuál no es de búsqueda, con las letras del abecedario almacenadas en los nodos (sin repeticiones). Escriba un procedimiento que dada una letra, busque el nodo en el que se encuentra esa letra y luego imprima todas las letras encontradas en el camino desde la raíz hasta donde se encontró la letra buscada, en ese mismo orden.

18. Diga si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifique: En un árbol binario balanceado, para cada nodo, la máxima diferencia entre las cantidades de nodos de sus subárboles izquierdo y derecho es uno.

19. Sea h la altura de un árbol binario T . Determine las dimensiones mínimas de un arreglo lineal en PASCAL en el cual podría almacenarse todo el árbol. ¿Cómo sería el acceso?

20. Escriba un procedimiento $VACIAR(r)$ que reciba el apuntador r a la raíz de un árbol T y libere el espacio en memoria ocupado por ese árbol, devolviendo $r=NIL$.

21. Suponga que dispone de los siguientes operadores:

- $Nivel(T,x)$: devuelve un entero correspondiente al nivel del nodo cuya clave es x en el árbol T .
- $Padre(T,x)$: devuelve la clave del nodo padre del nodo cuya clave es x .

Usando estos operadores, escriba un procedimiento $PAC(T, x, y)$ que devuelva la clave del nodo correspondiente al primer antecesor común de los nodos cuyas claves son x e y respectivamente.

22. Sea T un árbol AVL representado mediante la siguiente estructura:

```
Type nodo:   record
```

```

clave: info;
izq, der : ^nodo;
end;

```

Var T: ^nodo;

Escriba un programa que permita determinar si T es perfectamente balanceado.

23. Para una expresión aritmética en preorden en la cual sólo aparecen los operadores binarios (+, -, /, *), diseñe un algoritmo que construya el árbol binario asociado a la expresión.
24. Construya el árbol binario correspondiente a la siguiente expresión aritmética:

$$[(a + b) - c] * [(f - g) / h]$$

25. Escriba un programa que recorra el árbol anterior y escriba en notación postfija la expresión representada.
26. Sea T un árbol binario que representa un árbol genealógico, donde los descendientes directos de cada nodo son su padre y su madre. Utilizando la siguiente estructura:

```

Type nodo:   record
                nombre: string[255];
                padre, madre: ^nodo;
                end;

```

Escriba un programa que dado el nombre de una persona, recorra el árbol en preorden para buscarla. Si la encuentra, deberá escribir quien fue su pareja, y en caso contrario, deberá indicar que la persona buscada no está en el árbol.

27. Construya un árbol binario balanceado de 12 nodos que tenga altura máxima.
28. Escriba un programa que, dado un apuntador a la raíz de un árbol de búsqueda T y una clave x , determine si esa clave está en el árbol, y en caso afirmativo, devuelva el apuntador al nodo donde se encuentra, el nivel en el cual está ese nodo y una lista de todas las claves mayores que x que se encuentran en el árbol, ordenadas de menor a mayor.
29. Sea T un árbol tipo B de orden N . Pruebe lo siguiente:
 - a) Sea x_i la i -ésima clave en el orden natural. Si se encuentra en un nodo interior del árbol entonces el inmediato predecesor de x_i en el orden natural está en el mismo nodo o en el nivel más bajo del árbol.
 - b) Una búsqueda infructuosa para una clave z , con $x_{i-1} \leq z \leq x_i$ involucra comparaciones con ambas claves x_{i-1} y x_i
30. Diseñe un algoritmo que liste todas las claves almacenadas en un árbol tipo B de orden N , en orden natural.
31. Sea L una lista de n claves a ser almacenadas secuencialmente en un árbol tipo B. Si el árbol resultante tiene N nodos y h niveles, demuestre que el número de nodos que debió ser dividido en la construcción del árbol es: $N-h$.
32. El catálogo de archivos de un sistema operativo está organizado como árbol binario ordenado. Cada nodo designa un archivo y especifica un nombre para el mismo, además de, entre otras cosas, la fecha en que fue utilizado por última vez, codificada como un número entero. Escriba un programa que recorra el árbol y barra todos los archivos que fueron utilizados por última vez antes de una fecha determinada.
33. Escriba un programa que encuentre todas las claves en un árbol binario de búsqueda, cuyos valores estén en el intervalo $[a, b]$. El resultado debe quedar ordenado ascendentemente. Puede considerar que no hay claves repetidas.
34. Demuestre que el número de hojas de un árbol binario completo es siempre más grande que el número de nodos internos.

35. Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. La **distancia** $d(v, w)$ entre dos nodos v, w se define como la longitud (número de lados) de la cadena más corta entre v y w . Si no existe cadena entre v y w , entonces $d(v, w) = \infty$. La **excentricidad** $e(v)$ de un nodo v se define como la distancia de v a su nodo más lejano (máximo de las distancias desde v), de donde:

$$e(v) = \text{Max}_{w \in V} d(v, w)$$

$$\text{arg Min}_{v \in V} e(v)$$

Un **centro** de G es un nodo v cuya excentricidad es mínima, es decir:

Observación: un grafo G puede poseer más de un centro v , y además, si G no es conexo no tiene sentido hablar de centro pues la excentricidad no estaría definida.

Sea T un árbol binario de búsqueda. Demuestre la siguiente equivalencia: T es un árbol AVL si y sólo si para todo vértice x de T , x es un centro del sub árbol de T cuya raíz es x .

36. Escriba un algoritmo para concatenar dos árboles de tipo B de un mismo orden N .
37. Escriba un programa para hallar el k -ésimo mayor elemento en un árbol tipo B.
38. Los árboles tipo B se utilizan fundamentalmente para organizar datos en dispositivos de almacenamiento secundarios. Tomando en cuenta este hecho, resuelva el siguiente problema: Para implementar un diccionario de estudiantes en un disco se tienen los siguientes datos:

Tamaño de página:	512 bytes
Tamaño de cada registro:	por determinar
Campo clave (carnet):	4 bytes
Datos personales:	60 bytes
Datos académicos:	30 bytes
Cada campo apuntador:	4 bytes

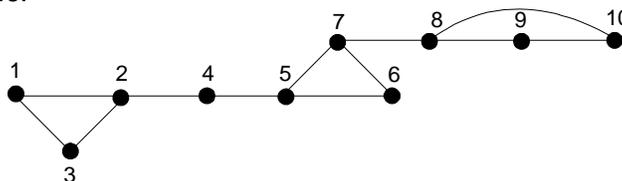
¿Cómo organizaría usted el diccionario de manera de optimizar la eficiencia de las operaciones?

39. Dadas las siguientes claves, construya un árbol binario de búsqueda:
- 2 5 8 10 67 3 32 18 25 13 1 78 19 9 82
40. Considere el árbol construido en el ejercicio anterior. Vaya eliminando las siguientes claves:
- 8 10 67 25 78 98 5 13 1
41. Dadas las siguientes claves, construya un árbol binario de búsqueda balanceado AVL:
- 18 32 4 2 5 6 17 21 35 67 1 33 10 11 4
42. Tomando en cuenta el árbol construido en el ejercicio anterior, elimine las siguientes claves y mantenga el balanceo AVL:
- 32 2 6 17 21 67 11 1 33 4 18
43. Considere la siguiente secuencia de claves alfabéticas:
- a c f h k l p m c e r t d w q i j s x z n b v y u
44. Dada las siguientes claves construya un árbol tipo B de orden 2.
- 40 50 12 35 5 19 25 9 10 15 17 29 31 71 67 55 43 46 37 20 53 8 3 1
45. Tomando en cuenta el árbol anterior, elimine paso a paso las siguiente claves:
- 12 5 25 43 46 3 1 40 50 19 15 71 55

46. Escriba un procedimiento en PASCAL que almacene N claves en un árbol binario perfectamente balanceado.
47. Dados árboles binarios T_1, T_2, \dots, T_n :
- Escriba una función en PASCAL que reciba el apuntador a un árbol T_i y devuelva un entero que es la altura del árbol
 - Escriba un procedimiento en PASCAL que reciba los apuntadores a dos árboles binarios T_i y T_j y los concatene. La concatenación debe ser de la siguiente forma: se toma el árbol de menor altura y su raíz se enlaza a la hoja de menor nivel en el árbol de mayor altura.
48. Utilizar el algoritmo de Kruskal para construir un árbol mínimo cobertor del grafo $G=(V,E)$ respecto a la función de costos c .

Lado	Costo	Lado	Costo
{a, b}	2	{e, f}	8
{a, c}	1	{e, g}	7
{a, d}	8	{e, h}	1
{b, d}	6	{f, h}	8
{c, d}	4	{g, h}	5
{c, e}	7	{e, i}	7
{c, f}	3	{g, j}	8
{d, f}	2	{h, j}	4
{d, f}	8	{i, j}	8

49. ¿Cómo modificaría el algoritmo de Kruskal para hallar el árbol de expansión de costo máximo?
50. Pruebe que la siguiente afirmación es falsa: Si G es un grafo con una función de costos $c:E \rightarrow \mathbb{N}$ tal que G tiene un único árbol mínimo cobertor, entonces G no tiene ciclos.
51. Diseñe un algoritmo que halle las componentes fuertemente conexas de un grafo basándose en el algoritmo de PRIM.
52. En el siguiente grafo:



- Halle un árbol mínimo cobertor usando Kruskal.
 - Halle un árbol mínimo cobertor usando Prim.
53. La siguiente tabla representa los arcos de un digrafo cuyos nodos son $V=\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Este grafo corresponde a una red de comunicación y los costos de utilización de cada arco aparecen también en la tabla.

N. Inicial	N. Terminal	Costo	N. Inicial	N. Terminal	Costo
------------	-------------	-------	------------	-------------	-------

a	b	2	e	b	2
b	d	2	f	c	3
c	a	1	f	e	1
d	c	3	g	e	2
d	e	1	g	f	4

Se desea determinar la red que comunique el nodo g con cada uno de los otros nodos de forma que la red resultante tenga el mínimo costo global.

54. Muestre que si $G=(V,E)$ es un grafo no dirigido cuyas aristas tiene costos positivos todos distintos, entonces G tiene un único árbol mínimo cobertor.
55. Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo y no orientado y con al menos un istmo e . Sea G_1 y G_2 las dos componentes conexas de $G'=(V, E-\{e\})$, sean T_1 y T_2 los árboles mínimos de expansión de las dos componentes conexas de G' . Sea $T=T_1 \cup T_2 \cup \{e\}$. Demuestre que T es un árbol mínimo cobertor de G .
56. En los campos de golf de LAMUNITA Golf Club se desea instalar un sistema de riego automatizado. Para tal fin se debe instalar una red de tuberías para distribuir agua con fertilizantes para la grama. Los tubos a instalar tienen diferentes diámetros y costos según el terreno por donde deben pasar. Los puntos de riego están marcados con las letras de la a al f. Las tuberías posibles de instalar con sus respectivos diámetros y costos son las siguientes:

Tubería	Costo	Diámetro	Tubería	Costo	Diámetro
{a, b}	3	3	{b, d}	5	5
{a, c}	1	5	{b, f}	1	2
{a, d}	1	2	{c, e}	3	5
{a, e}	2	4	{d, e}	2	4
{b, e}	2	2	{d, f}	1	1
{b, e}	2	3	{e, f}	4	3

Sin embargo, para facilitar el paso del agua con fertilizantes, se ha determinado que las tuberías a utilizar deben tener un diámetro mayor o igual a 3. Bajo estas condiciones, determine la red de riego de menor costo. Indique el algoritmo a utilizar y cualquier modificación al mismo si lo considera necesario.

57. El departamento de vialidad del municipio Apié posee un presupuesto limitado para la construcción o reparación de las vías de comunicación del municipio. El municipio Apié consta de diez urbanizaciones y es la intención del departamento proveer a los residentes de las comunidades de un sistema de carreteras que permita interconectar todos los poblados. El cuadro siguiente muestra los costos de conexión directa entre las comunidades, para todas las conexiones posibles:

Conexión	Costo de comunicación
1-2	7
2-3	4
3-7	2

3-8	6
4-5	6
5-6	4
6-7	5
6-10	4
6-9	3
10-9	5
1-9	7

Determine, utilizando sus conocimientos de grafos, cómo deben ser conectados las ciudades de manera que la red de vialidad sea de costo mínimo.